

# 相移器平移误差与倾斜误差不敏感相移新算法

郭红卫, 陈明仪

(上海大学精密机械工程系, 上海嘉定 201800)

摘要: 相移器的相移误差包括平移误差与倾斜误差, 使同一幅干涉图诸像素点的相移量并不相等, 但仍然在同一平面上。据此, 本文提出了消除相移器位移误差与倾斜误差的最小二乘迭代算法。通过对相移平面的最小二乘拟合, 即可以消除相移器平移误差与倾斜误差对位相分布求解结果的影响。并通过数值模拟, 验证了这种算法在消除相移器位移误差与倾斜影响上的有效性。

关键词: 相移干涉术; 相移误差; 最小二乘解; 迭代法

中图分类号: O436.1 文献标识码: A

## 1 引言

相移干涉术<sup>[1]</sup>中, 常以 PZT 等器件驱动干涉仪参考镜沿参考臂移动, 从而得到之间存在相移的多幅干涉图; 并利用相移算法, 求解被测波前的位相分布。而传统相移算法中, 大多以确知相移量为前提条件。因而, 相移器的位移与导向误差必然会大大影响位相分布的求解精度。与此不同, 一些算法将相移量作为未知量进行求解, 从而消除其误差的影响。例如, 作为传统算法之一的 Carré 算法利用四幅等步距相移干涉图, 求解位相的精确解; 而 C. J. Morgan<sup>[2]</sup>利用四幅以上等步距相移干涉图, 求解相移量与位相的最小二乘解。二者均可消除相移线性误差的影响。更进一步, Katsuyuki Okada 等<sup>[3]</sup>以及 In-Bok Kong 与 Seung-Woo Kim<sup>[4, 5]</sup>从同一幅干涉图诸像素相移量相等这一认识出发, 可求解各幅干涉图各自的相移量, 以及被测波前位相的最小二乘解。其中, 以交替求解相位分布与相移量的迭代过程, 使其算法简便易行。但由于相移器存在导向误差, 必然导致相移过程中的参考镜不能平行于其初始位置, 即参考镜倾斜。致使同一幅干涉图诸像素相移量并不相等, 产生相移倾斜误差。因此, 文献[3-5]中的算法并不能完全消除包括倾斜误差在内的相移误差的影响。

本文认为, 由于相移器导向误差导致参考镜

倾斜, 使同一幅干涉图诸像素相移量虽不相等, 但仍位于同一平面上。由此提出一种新的迭代算法, 通过对此平面的最小二乘拟合, 大大减小参考镜倾斜在位相求解结果中引入的误差。

## 2 基本原理

### 2.1 位相最小二乘算法

图 1 所示的 Twyman-Green 干涉仪中, 以 PZT 驱动参考镜移动而引入相移。若 PZT 器件存在导向误差, 则导致参考镜倾斜。此时, 可将第  $n$  幅干涉图中  $(i, j)$  像素光强表示为

$$I_n(i, j) = I_0(i, j)$$

$$\{1 + r(i, j) \cos[\varphi(i, j) - \delta_n(i, j)]\} \quad (1)$$

其中,  $I_0$  为背景光强,  $r$  为对比度,  $\varphi$  为待测位相,  $\delta_n$  为相移量。 $\delta_n$  可表示为

$$\delta_n(i, j) = a_n i + b_n j + d_n \quad (2)$$

式(2)为一平面方程, 可称此平面为相移平面。其中  $a_n$  与  $b_n$  分别为相移平面沿  $i, j$  方向的斜率,  $d_n$  为  $(0, 0)$  像素的相移量。

定义光强差为

$$\Delta I_n(i, j) = I_n(i, j) - I_1(i, j) \quad (3)$$

由  $a_1 = b_1 = 0, d_1 = 0$ , 及三角公式可得

$$\Delta I_n(i, j) = C(i, j) [\cos((a_n i + b_n j + d_n) - \varphi(i, j)) - 1] + S(i, j) \sin(a_n i + b_n j + d_n) \quad (4)$$

其中,  $C(i, j) = I_0(i, j) r(i, j) \cos[\varphi(i, j)]$ ,  $S(i, j) = I_0(i, j) r(i, j) \sin[\varphi(i, j)]$ 。

针对某一像素  $(i, j)$ , 若已知各幅干涉图的  $a_n, b_n, d_n$  值, 将其代入式(4), 形成线性方程组, 求取  $C(i, j)$  与  $S(i, j)$  的最小二乘解, 则其位相为

$$\varphi(i, j) = \tan^{-1} \frac{S(i, j)}{C(i, j)} \quad (5)$$

$$a_n = - \frac{A_n}{\sin d_n} \quad (11)$$

$$b_n = - \frac{B_n}{\sin d_n} \quad (12)$$

### 2.3 迭代过程

可以认为, 若以  $a_n, b_n, d_n$  的初值, 由式(4) 求解得到的  $C(i, j)$  与  $S(i, j)$  接近于其真值。则将其代入式(7), 并由式(8 ~ 12) 重新求解  $a_n, b_n, d_n$ , 则其结果要比其初值精确。因而可形成迭代过程。步骤简述如下:

① 选取不共线的若干像素点  $(i, j)$ , 以名义相移量为初值  $d_n^{(0)}$ , 并设  $a_n^{(0)} = b_n^{(0)} = 0$ , 代入式(4), 求解线性方程组的最小二乘解, 得到第 1 次迭代结果  $C^{(1)}(i, j), S^{(1)}(i, j)$ ;

② 对  $n > 1$  的全体  $n$  值, 分别将第  $k$  次迭代结果  $C^{(k)}(i, j), S^{(k)}(i, j)$  代入式(7), 求解线性方程组的最小二乘解, 并由式(8 ~ 12) 求解得到  $a_n^{(k)}, b_n^{(k)}, d_n^{(k)}$ ;

③ 将  $a_n^{(k)}, b_n^{(k)}, d_n^{(k)}$  代入式(4), 求解线性方程组的最小二乘解, 得到第  $k + 1$  次迭代结果  $C^{(k+1)}(i, j), S^{(k+1)}(i, j)$ 。重复第 2、3 步, 直至足够精度;

④ 根据式(4), 对全体像素点求解  $C(i, j), S(i, j)$ , 再根据式(5) 求出  $\varphi$  值。

### 3 数值验证

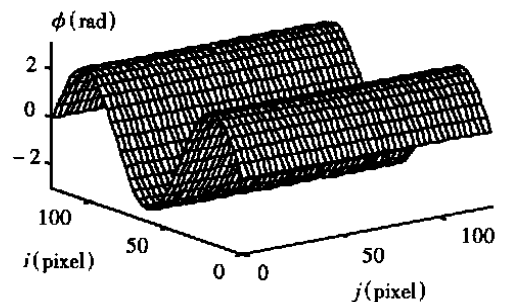


Fig. 2 The given phase distribution

假设一被测波前的位相分布如图 2 所示。假设名义相移步距为  $0.25\pi$ , 模拟生成 8 幅  $128 \times 128$  像素干涉图。其中, 第  $n$  幅干涉图  $(i, j)$  像素的相移量  $\delta_n$  为

$$\delta_n(i, j) = 0.25(n-1)\pi + 0.05p_n\pi + 0.05(s_n i + t_n j)\pi/127 \quad (13)$$

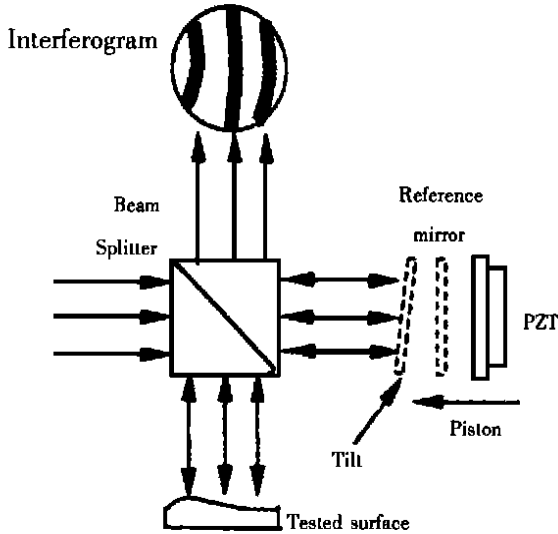


Fig. 1 Twyman-green interferometer with tilt phase shift error

### 2.2 相移平面最小二乘拟合算法

由于  $a_n, b_n$  数值微小, 因而可将式(4) 近似为

$$\Delta I_n(i, j) = C(i, j)[\cos d_n - (a_n i + b_n j) \sin d_n - 1] + S(i, j)[\sin d_n + (a_n i + b_n j) \cos d_n] \quad (6)$$

整理式(6), 可得

$$\Delta I_n(i, j) = C(i, j)(A_n i + B_n j + D_n - 1) + S(i, j)(E_n i + F_n j + G_n) \quad (7)$$

其中:  $A_n = -a_n \sin d_n, B_n = -b_n \sin d_n, D_n = \cos d_n, E_n = b_n \cos d_n, F_n = \sin d_n, G_n = \sin d_n$ 。

对第  $n (> 1)$  幅干涉图, 若已知各像素的  $C(i, j)$  与  $S(i, j)$  值, 将其代入式(7), 形成线性方程组。求取  $A_n, B_n, D_n, E_n, F_n, G_n$  的最小二乘解, 进而可确定  $a_n, b_n, d_n$  值

$$d_n = \tan^{-1} \frac{G_n}{D_n} \quad (8)$$

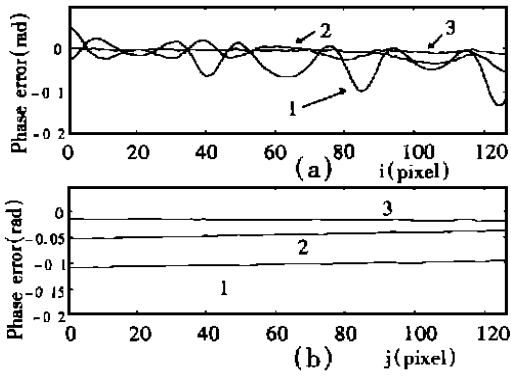
当  $\cos d_n \neq 0$  时

$$a_n = \frac{E_n}{\cos d_n} \quad (9)$$

$$b_n = \frac{F_n}{\cos d_n} \quad (10)$$

当  $\cos d_n = 0$  时

其中,  $p_n, S_n, l_n$  为分布在 $-1 \sim 1$ 之间的随机数, 由计算机生成, 用以引入平移误差及倾斜误差。



Legend: 1. Synchronous detection

2. In-Bok Kong's algorithm;

3. Algorithm proposed in this paper.

Fig. 3 Calculated phase errors: (a) errors along a pixel column ( $j = 0$ ) and (b) errors along a pixel row ( $i = 127$ ).

用不同算法求解位相, 所得结果与原来给定位相沿两个方向像素列的差值, 见图 3 所示, (a) 代表  $j = 0$  像列, (b) 为  $i = 127$  像素行。其中方法 1 为同步检测算法<sup>[1]</sup>, 方法 2 为 In-Bok Kong<sup>[3]</sup> 的算

法, 方法 3 为本文所述算法。由图 3 中可见, 由于引入了相移器位移误差与倾斜, 作为传统算法的方法 1 会产生较大误差。方法 2、3 则可消除了大部分误差, 其中, 由于方法 3 基本消除了倾斜的影响, 因而比方法 2 更为优越, 其精度高于方法 2。

## 4 总 结

本文认为, 相移器存在导向误差时, 参考镜不能保持平行运动, 即产生倾斜误差。致使同一干涉图诸像素点的相移量并不相等, 但在同一平面上。通过对此相移平面的最小二乘拟合, 可以消除相移器位移误差与倾斜对位相求解结果的影响。据此, 本文提出了一种对相移器平移误差与倾斜误差均不敏感的最小二乘迭代算法。通过数值模拟, 验证了这种算法在消除相移器平移误差与倾斜误差影响上十分有效。

由于本文式(5)所作的近似, 其前提是倾斜微小, 而一般相移器的导向精度足以满足此前提, 因此本算法有其实用价值。针对大的倾斜, 本算法尚存在方法误差。但其误差仍小于其他不考虑倾斜的算法。

## 参考文献:

- [1] Creath Katherine. Temporal Phase Measurement Method [A]. In: Robinson D W and Reid G (Eds.). Interferogram Analysis: Digital Fringe Pattern Measurement [M]. Bristol and Philadelphia: 10Pltd., 1993. 94-140.
- [2] Morgan C J. Least-squares estimation in phase-measurement interferometry [J]. Opt. Lett., 1982, 7(8): 368-370.
- [3] Okada Katsuyuki, Atsushi Sato, Jumpei Tsujiuchi. Simultaneous calculation of phase distribution and scanning phase shifting interferometry [J]. Opt. Comm., 1991, 84(3, 4): 118-124.
- [4] In-Bok Kong, Kim Seung-Woo. General algorithm of phase-shifting interferometry by iterative least-squares fitting [J]. Opt. Eng., 1995, 34(1): 183-187.
- [5] In-Bok Kong, Seung-Woo Kim. Portable inspection of precision surfaces by phase-shifting interferometry with automatic suppression of phase-shift errors [J]. Opt. Eng., 1995, 34(5): 1400-1404.

## New algorithm insensitive to the piston and tilt errors of reference mirror for phase stepping interferometer

GUO Hong-wei, CHEN Ming-yi

*(Precision Mechanical Engineering Department, Shanghai University,  
Jiading, Shanghai 201800, China)*

**Abstract:** A new algorithm insensitive to the piston and tilt errors of reference mirror for phase stepping interferometer is presented. Clearly, if the reference mirror has tilt and piston errors caused by phase-shifting, every pixel on the same interferogram will have different phase-shift values. And by the fact that the phase shifts of all the pixel on the same interferogram are still kept on a same plane, so by least-squares fitting to the phase-shift plane, the errors can be eliminated. The validity of this algorithm has been demonstrated by means of computer simulation.

**Key words:** phase shifting interferometry; phase shifting errors; least-squares fitting; iterative;

作者简介: 郭红卫(1968-),男。1990年毕业于西安交通大学机械工程系,获得工学学士学位。1996年进入上海大学精密机械工程系攻读硕士学位,1998年提前攻读博士学位。研究方向为光学检测技术。